मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक

नाम .....

131 324(EM)

2019

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं ।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

निर्देश : i) इस प्रश्नपत्र में कुल **नौ** प्रश्न हैं।

ii) **सभी** प्रश्न अनिवार्य हैं।

iii) प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।

iv) प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।

v) प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।

vi) जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

Instructions :

i) There are in all *nine* questions in this question paper.

ii) *All* questions are compulsory.

iii) In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.

iv) Marks allotted to questions are indicated against them.

v) Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.

vi) Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि एक फलन $f : N \to N$, $f(x) = x - 1$, $x > 2$ द्वारा परिभाषित है तथा $f(1) = f(2) = 1$ है तो सही विकल्प होगा

i) f एकैकी आच्छादक है

ii) f बहु एक आच्छादक है

iii) f एकैकी है परन्तु आच्छादक नहीं है

iv) f बहु एक है परन्तु आच्छादक नहीं है। 1

ख) समुच्चय N में $R = \{(x, y) : x+2y=8\}$ द्वारा प्रदत्त सम्बन्ध R का परिसर निम्न में से कौन-सा है ?

i) $\{2, 4, 8\}$ ii) $\{2, 4, 6, 8\}$
iii) $\{2, 4, 6\}$ iv) $\{1, 2, 3, 4\}$. 1

ग) समाकलन $\int x \sin x \, dx$ का मान होगा

i) $x \sin x + \cos x$
ii) $-x \cos x + \sin x$
iii) $x \sin x - \cos x$
iv) $x \cos x + \sin x$. 1

घ) अवकल समीकरण

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y = 0$$ की कोटि है

i) 1 ii) 2
iii) 3 iv) 4. 1

ङ) $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है

i) -1 ii) 1
iii) 3 iv) 0. 1

1. Attempt *all* the parts of the following :

a) Let the function $f : N \to N$ be defined by $f(x) = x - 1$, $x > 2$ and $f(1) = f(2) = 1$.

The correct alternative will be

i) f is one-one onto
ii) f is many one onto
iii) f is one-one but not onto
iv) f is many one but not onto. 1

b) If $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$ is defined on the set N then which one is the range of R ?

i) $\{2, 4, 8\}$ ii) $\{2, 4, 6, 8\}$
iii) $\{2, 4, 6\}$ iv) $\{1, 2, 3, 4\}$. 1

c) The value of $\int x \sin x \, dx$ is

i) $x \sin x + \cos x$
ii) $-x \cos x + \sin x$
iii) $x \sin x - \cos x$
iv) $x \cos x + \sin x$. 1

d) The order of differential equation

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + y = 0 \text{ is}$$

i) 1 ii) 2

iii) 3 iv) 4. 1

e) The value of

$$\hat{i}.(\hat{j}\times\hat{k}) + \hat{j}.(\hat{i}\times\hat{k}) + \hat{k}.(\hat{i}\times\hat{j})$$

is

i) -1 ii) 1

iii) 3 iv) 0. 1

2. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ का मुख्य मान ज्ञात कीजिए। 1

ख) दिखाइए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{यदि } x \neq 0 \\ 1 & \text{यदि } x = 0 \end{cases}$$

$x = 0$ पर संतत नहीं है। 1

ग) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 - x^2}$ की कोटि तथा घात बताइए। 1

घ) निम्न अवरोधों

$x + y \leq 5,\ x \geq 0,\ y \geq 0$

के अन्तर्गत $Z = x^2 + y^2$ का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 1

ङ) यदि $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{1}{3}$,

$P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ तो $P(A/B)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt *all* the parts of the following :

a) Find principal value of

$$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$ 1

b) Show that function

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

is not continuous at $x = 0$. 1

c) Find order and degree of the differential equation

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{a^2 - x^2}.$$ 1

d) Under the following constraints

$x + y \leq 5,\ x \geq 0,\ y \geq 0,$

find the maximum value of

$Z = x^2 + y^2.$ 1

e) If $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ then find the value of $P(A/B)$. 1

3. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$ तो $(g\circ f)$ तथा $(f\circ g)$ के मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) यदि $y=3\cos(\log x)+4\sin(\log x)$ तो सिद्ध कीजिए कि $x^2y_2+xy_1+y=0$. 2

ग) सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $A(1,2,7)$, $B(2,6,3)$, $C(3,10,-1)$ संरेख हैं। 2

घ) एक थैली में 5 लाल तथा 6 काली गेंदें हैं। दो गेंदें यादृच्छया निकाली जाती हैं। उनके अलग-अलग रंग के होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 2

3. Attempt *all* the parts of the following :

a) If $f(x)=x^2$, $g(x)=\sin x$, then find $(g\circ f)$ and $(f\circ g)$. 2

b) If $y=3\cos(\log x)+4\sin(\log x)$ then prove that $x^2y_2+xy_1+y=0$. 2

c) Prove that points $A(1,2,7)$, $B(2,6,3)$, $C(3,10,-1)$ are collinear. 2

d) Two balls are drawn randomly from a bag containing 5 red and 6 black balls. What is the probability that both are of different colours ? 2

4. निम्नलिखित **सभी** खण्डों को हल कीजिए :

क) अन्तराल $[1,4]$ में $f(x)=x^2-4x-3$ के लिए मध्य मान प्रमेय सत्यापित कीजिए। 2

ख) सदिशों $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k}$ और $\vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ के योगफल एवं अन्तर के अनुदिश मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए। 2

ग) यदि $(2\hat{i}+6\hat{j}+27\hat{k})\times(\hat{i}+\lambda\hat{j}+\mu\hat{k})=0$ तो λ तथा μ के मान ज्ञात कीजिए। 2

घ) A और B दो स्वतंत्र घटनाएँ दी गई हैं। यदि $P(A)=0{\cdot}3$, $P(B)=0{\cdot}6$ तो ज्ञात कीजिए

i) $P(A\cap B)$

ii) $P(A\cup B)$. 2

4. Attempt *all* the parts of the following :

a) Verify mean value theorem for

$f(x) = x^2 - 4x - 3$ in the interval $[1, 4]$. 2

b) If $\vec{a} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$ and

$\vec{b} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ are two vectors, find unit vector along their sum and difference. 2

c) If $(2\hat{i} + 6\hat{j} + 27\hat{k}) \times (\hat{i} + \lambda\hat{j} + \mu\hat{k}) = 0$ then find the values of λ and μ. 2

d) A and B are two independent events. If $P(A) = 0{\cdot}3$, $P(B) = 0{\cdot}6$ then find

i) $P(A \cap B)$

ii) $P(A \cup B)$. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right).$$

5

ख) सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2.$$

5

ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$ 5

घ) रेखाओं $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ और $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$ के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 5

ङ) सिद्ध कीजिए कि दी गई तिर्यक ऊँचाई और महत्तम आयतन वाले शंकु का अर्ध शीर्षकोण $\tan^{-1}\sqrt{2}$ होता है। 5

च) यदि $-1 < x < 1$ के लिये $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}$. 5

5. Attempt any *five* parts of the following :

a) Prove that

$$\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{27}{11}\right).$$

5

b) Prove that

$$\begin{vmatrix} y+z & x & y \\ z+x & z & x \\ x+y & y & z \end{vmatrix} = (x+y+z)(x-z)^2.$$

5

c) Prove that

$$\int_0^{\pi/2} \log \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log 2.$$

5

d) Find the shortest distance between the lines $\vec{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$ and $\vec{r} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} + \mu(3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k})$.

5

e) Prove that semi-vertical angle of a cone of given slant height and maximum volume is $\tan^{-1}\sqrt{2}$. 5

f) If $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$ for $-1 < x < 1$ then prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{(1+x)^2}.$$

5

6. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{यदि } x < 0 \\ x+1 & \text{यदि } x \geq 0 \end{cases}$$

एक संतत फलन है। 5

ख) वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$ तथा परवलय $y^2 = 4x$ एवं x-अक्ष के मध्यवर्ती क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ग) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो तीन बिन्दुओं $(1, 1, -1)$, $(6, 4, -5)$ और $(-4, -2, 3)$ से गुजरता है।

घ) निम्न व्यवरोधों के अन्तर्गत $Z = 1{\cdot}5x + 2{\cdot}5y$ का न्यूनतमीकरण कीजिए :

$$x + 3y \geq 3$$
$$x + y \geq 2, \; x \geq 0, \; y \geq 0.$$

5

ङ) वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$ के बिन्दु $(1, 1)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए। 5

च) ताश के 52 पत्तों की एक अच्छी तरह फेंटी गई गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं। इक्कों की संख्या की प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए। 5

6. Attempt any *five* parts of the following :

a) Prove that the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } x < 0 \\ x+1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$$

is a continuous function. 5

b) Find the area of the region enclosed between circle $x^2 + y^2 = 8x$ and parabola $y^2 = 4x$ and x-axis. 5

c) Find the equation of a plane passing through three points $(1, 1, -1), (6, 4, -5), (-4, -2, 3)$. 5

d) Minimize $Z = 1{\cdot}5x + 2{\cdot}5y$ subject to the constraints

$x + 3y \geq 3$

$x + y \geq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0.$ 5

e) Find equation of tangent and normal at the point $(1, 1)$ of the curve $x^{2/3} + y^{2/3} = 2$. 5

f) From a well shuffled pack of 52 cards, two cards are drawn one by one with replacement. Find probability distribution of the number of aces. 5

7. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित आव्यूह का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

8

ख) निम्नलिखित समीकरण निकाय

$2x + y + z = 1$

$x - 2y - 3z = 1$

$3x + 2y + 4z = 5$

को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

7. Attempt any *one* part of the following :

a) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

by using elementary operations. 8

b) Solve the following system of equations by Matrix method :

$2x + y + z = 1$

$x - 2y - 3z = 1$

$3x + 2y + 4z = 5.$ 8

8. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) i) एक फलन $f : R \to (-1, 1)$

$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$, $\forall\ x \in R$ द्वारा परिभाषित है तो सिद्ध कीजिए कि f एकैकी तथा आच्छादक होगा। 4

ii) मान लीजिए $\vec{a}$, $\vec{b}$ और $\vec{c}$ तीन सदिश इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 5$ और इनमें से

प्रत्येक, अन्य दो सदिशों के योगफल पर लम्बवत हैं, तो $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ ज्ञात कीजिए। 4

ख) अवकल समीकरण

$(1+y^2)+(x-e^{-\tan^{-1}y})\frac{dy}{dx}=0$ को हल कीजिए। 8

8. Attempt any *one* part of the following :

a) i) A function $f: R \to (-1, 1)$ is defined by

$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$, $\forall\, x \in R$, then prove that f is one-one and onto. 4

ii) Suppose that $\vec{a}$, $\vec{b}$ and $\vec{c}$ are such type of vectors that $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$ and each one is perpendicular to the sum of other two vectors, then find $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$. 4

b) Solve the differential equation

$(1+y^2)+(x-e^{-\tan^{-1}y})\frac{dy}{dx}=0$. 8

9. निम्नलिखित में से किसी **एक** खण्ड को हल कीजिए :

क) $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) i) $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$ का मान ज्ञात कीजिए। 4

ii) यदि $y=x^{x^{x\ldots\infty}}$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 4

9. Attempt any *one* part of the following :

a) Evaluate $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)\,dx$. 8

b) i) Evaluate $\int_0^1 \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx$. 4

ii) If $y=x^{x^{x\ldots\infty}}$, then find $\frac{dy}{dx}$. 4