

अनुक्रमांक

नाम

131

324(EJ)

2019

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट | पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित है।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
  - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
  - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
  - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
  - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाएँ।
  - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

R2841

[ Turn over

324(EJ)

2

Instructions :

- There are in all nine questions in this question paper.
  - All questions are compulsory.
  - In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
  - Marks allotted to questions are indicated against the question.
  - Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
  - Do not waste your time over a question you cannot solve.
1. निम्नलिखित सभी खण्डों का हल कीजिए :
- क) समुच्चय  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  में  $R = \{(a, b) : a \text{ तथा } b \text{ दोनों ही या तो सम हैं या विषम हैं}\}$  तो निम्न में से सही सम्बन्ध चयन कीजिए :
- सम्बन्धहीन
  - तुच्छ
  - स्वतन्त्रता
  - सममित नहीं।

R2841

ख) सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = 2x \forall x \in \mathbb{R}$  द्वारा प्रदत्त फलन  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  आच्छादक है। 1

ग)  $\int \sin 2x \cos 3x dx$  का समाकलन कीजिए। 1

घ) सदिश  $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  तथा  $\vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$  के बीच का कोण ज्ञात कीजिए। 1

ङ) अवकल समीकरण

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

को घात क्या है? 1

1. Attempt all the parts of the following :

a) Write the correct option from the following if

$R\{(a, b) : a \text{ and } b \text{ both are either even or odd}\}$  in the set

$A\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  :

i) No relation

ii) Trivial

iii) Equivalence relation

iv) Not symmetric. 1

b) Prove that the function  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined on  $f(x) = 2x \forall x \in \mathbb{R}$  is onto. 1

c) Evaluate  $\int \sin 2x \cos 3x dx$ . 1

d) Find the angle between the vectors

$$\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \text{ and } \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}. 1$$

e) Find the degree of the differential equation :

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

1

2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}x, x \in [-1, 1]. 1$$

ख) सिद्ध कीजिए कि  $f(x) = x^2$  द्वारा परिभाषित फलन  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  न तो एकैकी है और न आच्छादक है। 1

ग) निम्नलिखित अवकल समीकरणों में से किस समीकरण का व्यापक हल  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$  है ?

i)  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

ii)  $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$ . (1) 1

घ) जाँच कीजिए कि फलन  $f(x) = x^2$ ,  $x = 0$  पर संतत है। (1) 1

ड) A और B दो घटनाएँ हैं कि  $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$  तब निम्न से घटनाओं के बारे में सही चयन कीजिए : (1) 1

i)  $A \subset B$  ii)  $A = B$

iii)  $A \cap B = \phi$  iv)  $P(A) = P(B)$ . 1

2. Attempt all the parts of the following :

a) Prove that

$$\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x, x \in [-1, 1].$$

1

b) Prove that the function  $f: R \rightarrow R$  defined on  $f(x) = x^2$  is neither one-one nor onto. 1

c) Which of the following differential equations has  $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ , a general solution ?

i)  $\frac{d^2 y}{dx^2} + y = 0$

ii)  $\frac{d^2 y}{dx^2} - y = 0$ . 1

d) Examine that the function  $f(x) = x^2$  is continuous at  $x = 0$ . 1

e) A and B are two events such that  $P(A/B) = P(B/A) \neq 0$ . Write the correct option from the following :

i)  $A \subset B$  ii)  $A = B$

iii)  $A \cap B = \phi$  iv)  $P(A) = P(B)$ . 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों का हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि यदि  $f: A \rightarrow B$  तथा  $g: B \rightarrow C$  एकैकी है, तो  $g \circ f: A \rightarrow C$  भी एकैकी है। 2

ख) यदि  $y = \sin^{-1} x$  तो सिद्ध कीजिए कि  
 $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$ . 2

ग) यदि सदिश  $a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  और सदिश  
 $3\hat{i} + b\hat{j}$  लम्बवत हों तो सिद्ध करें कि  
 $3a + 2b = 0$ . 2

घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो  
 कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़की  
 हो तो दोनों बच्चों के लड़की होने की क्या  
 प्रायिकता है? 2

3. Attempt all the parts of the following :

a) Prove that if  $f: A \rightarrow B$  and  
 $g: B \rightarrow C$  are one-one, then  
 $g \circ f: A \rightarrow C$  is also one-one. 2

b) Prove that  $(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} = x \frac{dy}{dx}$  if  
 $y = \sin^{-1} x$ . 2

c) If vectors  $a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$  and  $3\hat{i} + b\hat{j}$   
 are perpendicular then prove that  
 $3a + 2b = 0$ . 2

d) There are two children in a family.  
 If it is known that at least a child  
 is a girl then what is the  
 probability that both the children  
 are girls? 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि  $E$  और  $F$  इस प्रकार की घटनाएँ हैं कि  
 $P(E) = 0.6$ ,  $P(F) = 0.3$  और  
 $P(E \cap F) = 0.2$ , तो  $P(E/F)$  तथा  
 $P(F/E)$  के मान ज्ञात कीजिए। 2

ख) दिखाएँ कि दो सदिशों  $\vec{a}$  तथा  $\vec{b}$  के लिए  
 सदैव  $|\vec{a} + \vec{b}| < |\vec{a}| + |\vec{b}|$  होते हैं। 2

ग) दिखाइए कि रेखाएँ  $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$   
 और  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  परस्पर लम्ब हैं। 2

घ)  $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 2

4. Attempt all the parts of the following :

a) If  $E$  and  $F$  are two events such  
 that  $P(E) = 0.6$ ,  $P(F) = 0.3$  and  
 $P(E \cap F) = 0.2$ , find the values  
 of  $P(E/F)$  and  $P(F/E)$ . 2

- b) Show that  $|\bar{a} + \bar{b}| < |\bar{a}| + |\bar{b}|$  is always true for any two vectors  $\bar{a}$  and  $\bar{b}$ . 2
- c) Show that the lines  $\frac{x-5}{7} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$  and  $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$  are orthogonal to each other. 2
- d) Evaluate:  $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(e^x x)} dx$ . 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) मान ज्ञात कीजिए  $\int \frac{dx}{1 + \cos x + \sin x}$ . 5

ख) दर्शाइए कि

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left( 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

ग) उस समतल का सदिश और कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दु  $(5, 2, -4)$  से जाता है तथा  $(2, 3, -1)$  दिक्-कोणिया वालो रेखा पर लम्ब है। 5

घ) प्रथम चतुर्थांश में वृत्त  $x^2 + y^2 = 32$ , रेखा  $y = x$  एवं  $x$ -अक्ष से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

उ) सिद्ध कीजिए

$$2 \tan^{-1} \frac{1}{2} - \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}$$
 5

च) आलंक्रोय विधि से  $Z = 3x + 9y$  का न्यूनतम मान ज्ञात कीजिए, जिसके अवरोध निम्नवत हैं :

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y, x \geq 0, y \geq 0.$$
 5

5. Attempt any five parts of the following :

a) Evaluate  $\int \frac{dx}{1 - \cos x - \sin x}$ . 5

b) Show that

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left( 1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

c) Find the vector and Cartesian equation of a plane which passes through point  $(5, 2, -4)$  and is perpendicular to the line having  $(2, 3, -1)$  its direction cosines. 5

d) Find the area of the region enclosed in first quadrant by the circle  $x^2 + y^2 = 32$ , line  $y = x$  and  $x$ -axis. 5

c) Prove that

$$2 \tan^{-1} \frac{1}{2} + \tan^{-1} \frac{1}{7} = \tan^{-1} \frac{31}{17}. \quad 5$$

f) Find the minimum value of  $Z = 3x + 9y$  graphically of a problem satisfying the following constraint equations :

$$x + 3y \leq 60$$

$$x + y \geq 10$$

$$x \leq y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0. \quad 5$$

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) निम्नलिखित फलन के सांतत्य और अवकलनीयता का  $x = 1$  पर विचार कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{यदि } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{यदि } x > 1 \end{cases} \quad 5$$

ख)  $x$  के सापेक्ष अवकलन कीजिए

$$e^{\sec^2 x} + 3 \cos^{-1} x + x^x. \quad 5$$

ग) एक स्थिर तालाब में एक पत्थर डाला जाता है और उत्पन्न तरंगें वृत्त में  $4 \text{ cm/sec}$  की गति से चलती हैं। जब वृत्ताकार तरंगों की त्रिज्या  $10 \text{ cm}$  है, तो उस क्षण घिरा हुआ क्षेत्रफल कितनी तेजी से बढ़ रहा है ? 5

घ) अवकल समाकरण

$$xy \frac{dy}{dx} = (x+2)(y+2) \text{ के लिए बिन्दु } (1, -1) \text{ से गुजरने वाली वक्र ज्ञात कीजिए।} \quad 5$$

ङ) रेखा  $y = 3x + 2$ ,  $x$ -अक्ष एवं कोटियाँ  $x = -1$  एवं  $x = 1$  से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। 5

च) एक रांगो डाक्टर से मिलने ट्रेन, बस, स्कूटर या अन्य किसी वाहन से जाता है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः  $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$  या  $\frac{2}{5}$  हैं। यदि वह ट्रेन, बस या स्कूटर से आता है तो उसके देर से आने की प्रायिकताएँ क्रमशः  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$  या  $\frac{1}{12}$  हैं परन्तु किसी अन्य वाहन से आने पर उसे देर नहीं होती है। यदि वह देर से आया तो उसके ट्रेन से आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। 5

6. Attempt any *five* parts of the following :

- a) Discuss the continuity and differentiability of

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{if } x \leq 1 \\ x - 2 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

at  $x = 1$ . 5

- b) Differentiate :

$e^{\sec^2 x} + 3 \cos^{-1} x + x^x$  with respect to  $x$ . 5

- c) A stone is dropped in a calm and quiet pond. The generated waves move in a circular form with 4 cm/sec speed. Find out with what speed the area covered by the waves is increasing when the radius of the travelling circular waves is 10 cm. 5

- d) Find the curve passing through the point  $(1, -1)$  having its differential equation

$$xy \frac{dy}{dx} = (x - 2)(y + 2). \quad 5$$

- e) Find the area enclosed by the lines  $y = 3x + 2$ ,  $x$ -axis, and ordinates  $x = -1$  and  $x = 1$ . 5

- f) A patient is travelling to a doctor by train, bus, scooter or any other means of transport whose probabilities are  $\frac{3}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}$  or  $\frac{2}{5}$  respectively. If he travels by train, bus or scooter he reaches late and their probabilities are  $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}$  or  $\frac{1}{12}$  respectively. He reaches on time if he travels by any other means of transport. If he reached late, find the probability of his coming by train. 5

7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

- क) निम्न समीकरणों को आव्यूह विधि से हल कीजिए :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1.$$

8

- ख) यदि आव्यूह  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$  हो तो

$A^{-1}$  ज्ञात कीजिए।

8

7. Attempt any one part of the following :

a) Solve the following equations :

$$x + y + z = 6$$

$$x - y + z = 2$$

$$2x + y - z = 1$$

by matrix method. 8

b) Find  $A^{-1}$  if matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}. \quad 8$$

8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो  $x = 0$  एवं  $x = 2\pi$  के मध्य वक्र  $y = \cos x$  से घिरा हुआ है। 8

ख) रेखाओं  $\frac{x-1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1}$  और

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$$

के बीच की न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए। 8

8. Attempt any one part of the following :

a) Find the area of the region enclosed by the curve  $y = \cos x$  between  $x = 0$  and  $x = 2\pi$ . 8

b) Find the shortest distance between the lines

$$\frac{x+1}{7} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+1}{1} \text{ and}$$

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}. \quad 8$$

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क)  $\int \frac{e^x}{(1-e^x)(2+e^x)} dx$  का मान ज्ञात कीजिए। 8

ख) हल कीजिए :  $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x$ . 8

9. Attempt any one part of the following :

a) Evaluate :  $\int \frac{e^x}{(1+e^x)(2+e^x)} dx$ . 8

b) Solve :  $\frac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sec x$ . 8

324(EJ)-1,50,000